

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b , discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y) , ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione

$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F .

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t ; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.
4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \rightarrow +\infty$.
Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMA 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.
2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x , l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da

$$U(x) = k \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

dove k è una costante positiva (unità di misura: $N \cdot m^2/C^2$).

3. Studiare la funzione $U(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?
4. A partire dal grafico della funzione U , tracciare il grafico della funzione U' , specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^m U'(x) dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di U').

QUESITI

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ \frac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g' .

2. Sia \mathcal{R} la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in \mathcal{R} e aventi un lato sull'asse x , quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.
3. Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
 - Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
 - Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:
- incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
 - abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
 - passi per il punto $P(7, 10)$.
- Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.
5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
- Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
 - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S .
6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da $x(t) = \frac{1}{9}t^2 \left(\frac{1}{3}t + 2 \right)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.
7. Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.
- Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.
 - Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico.
- Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.
8. Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \sin(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l . Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t . Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.