Ordentlicher Termin 2023
Zweite schriftliche Prüfung

Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

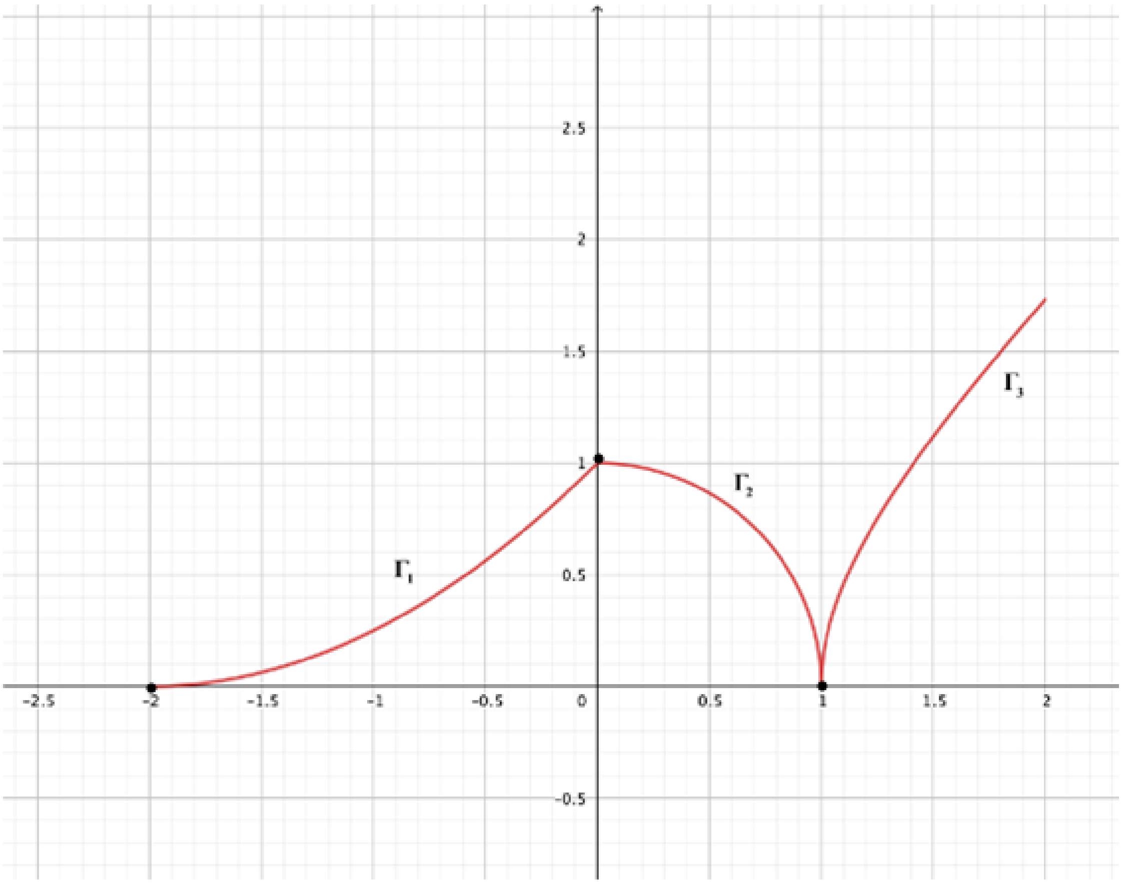
Realgymnasium
Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen!

PROBLEMSTELLUNG 1

Der Graph in der Abbildung, der durch die stetige Funktion $y = f(x)$ beschrieben wird, besteht aus der Vereinigung von dem Parabelbogen Γ_1, dem Kreisbogen Γ_2 und dem Hyperbelbogen Γ_3.



a) Schreiben Sie einen analytischen Ausdruck der Funktion f, die stückweise im Intervall $[-2; 2]$ definiert ist, unter Verwendung folgender Gleichungen:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

und bestimmen Sie die entsprechenden Werte der reellen Parameter *a, b, c.*

Untersuchen Sie die Ableitbarkeit der Funktion f und schreiben Sie die Geradengleichungen der eventuellen Tangenten in den Punkten mit Abszissenwert

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium
Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

b) Ausgehend vom Graphen der Funktion f, leiten Sie jenen seiner Ableitung f' ab und ermitteln Sie die Intervalle, in denen $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ konkav bzw. konvex ist.

c) Betrachten Sie die Funktion $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, die im Intervall $[-2; 0]$ definiert und deren Graph Γ_1 ist. Erklären Sie, warum diese Funktion umkehrbar ist, und schreiben Sie den analytischen Ausdruck ihrer Umkehrfunktion h. Untersuchen Sie die Ableitbarkeit von h und zeichnen Sie ihren Graphen.

d) Sei S jene Fläche im zweiten Quadranten, die vom Graphen Γ_1 und den Achsen des kartesischen Koordinatensystems eingeschlossen wird. Bestimmen Sie den Wert des reellen Parameters *k* so, dass die Gerade mit Gleichung $x = k$ die Fläche S in zwei gleich große Teile teilt.

PROBLEMSTELLUNG 2

Bei einem reelen Parameter *a,* mit $a \neq 0$, betrachte man die Funktion f_a, die folgendermaßen definiert ist:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

Der Graph der Funktion wird mit Ω_a bezeichnet.

a) Bestimmen Sie beim Variieren des Paramters *a* die Definitionsmenge von f_a und untersuchen Sie die Funktion auf eventuelle Unstetigkeitsstellen. Geben Sie die Gleichungen all ihrer Asymptoten an.

b) Zeigen Sie, dass sich für $a \neq 1$ alle Graphen Ω_a mit der eigenen horizontalen Asymptote im selben Punkt schneiden und sie dieselbe Tangente im Ursprung haben.

c) Bestimmen Sie beim Variieren von $a < 1$ die Monotonie der Funktion f_a. Untersuchen Sie die Funktion $\mathrm{f}_{-1}(x)$ und zeichnen Sie den Graphen Ω_{-1}.

d) Bestimmen Sie die Flächengröße der Region, die vom Graphen Ω_{-1}, von seiner Tangente durch den Ursprung und von der Geraden $x = \sqrt{3}$ eingeschlossen ist.

FRAGEN

1. Sei *ABC* ein rechtwinkliges Dreieck in *A*. Sei *O* der Mittelpunkt des Quadrats *BCDE*, das über die Hypotenuse auf der gegenüberliegenden Seite des Eckpunktes *A* konstruiert wurde. Zeigen Sie, dass *O* von den Geraden *AB* und *AC* denselben Abstand hat.

Ordentlicher Termin 2023
Zweite schriftliche Prüfung

Ministero dell'istruzione e del merito

H002 - STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Realgymnasium
Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

2. Ein gezinkter Würfel, dessen Seitenflächen jeweils mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind, besitzt folgende Eigenschaften: Bei einem Wurf hat die Seitenfläche mit einer geraden Zahl die doppelte Wahrscheinlichkeit, sich zu zeigen wie eine Seitenfläche mit einer ungeraden Zahl. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf folgendes Ergebnis gewürfelt wird:
   - eine Primzahl
   - eine Zahl, die mindestens 3 ist
   - eine Zahl, die höchstens 3 ist
3. Sei r die Gerade, die durch die Punkte $A(1;-2;0)$ und $B(2;\,3;-1)$ verläuft. Bestimmen Sie die Gleichung der Kugeloberfläche in Koordinatenform mit Mittelpunkt $C(1;-6;7)$ und tangential zu r.
4. Bestimmen Sie, ob unter allen Quadern (inkl. schiefe Quader) mit quadratischer Grundfläche und mit einem Volumen V jener mit der kleinsten Gesamtoberfläche auch die kleinste Diagonale besitzt.
5. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente zur Kurve mit Gleichung $y=\sqrt{25-x^2}$ im Punkt mit Abszissenwert 3, indem Sie zwei verschiedene Methoden anwenden.
6. Bestimmen Sie die Werte der reellen Parameter *a* und *b* so, dass:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(ax^3+bx)}{x^3}=1$$

7. Betrachten Sie die Funktion:

$$f(x)=\begin{cases}-1+arctan\,x & x<0\\ ax+b & x\geq 0\end{cases}$$

   Man bestimme für welche Werte der reellen Parameter *a*, *b* die Funktion ableitbar ist. Stellen Sie fest, ob es ein Intervall in $\mathbb{R}$ gibt, in dem die Funktion f die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes von Rolle erfüllt. Begründen Sie Ihre Antwort.

8. Es sei die Funktion $f_a(x)=x^5-5ax+a$ gegeben, wobei die Definitionsmenge die Menge der reellen Zahlen sei. Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters $a>0$ die Funktion drei voneinander unterschiedliche reelle Nullstellen besitzt.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden
Der Gebrauch wissenschaftlicher und/oder grafischer Taschenrechner ist erlaubt, sofern diese nicht mit einem CAS (Computer Algebra System) oder SAS (Symbolic Algebra System) ausgestattet sind.
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.